UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SOBRE CONTINUIDADE DE FORMAS BILINEARES NO ESPAÇO DAS SUCESSÕES LIMITADAS

CESAR RAITZ

ABRIL/1982

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

" **MESTRE EM CIÊNCIAS** "

especialmente em "Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Tarcísio Praciano Pereira, Ph.D.

Orientador

Prof. Almir Joaquim de Souza, Ph.D.

Prof. Inder Jeet Taneja, Ph.D.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor Tarcísio Praciano Pereira, pela sua segura e criteriosa orientação, dedicação, incentivo e amizade.

A meus pais, minha esposa, meus filhos, meus professores e colegas, que direta ou indiretamente partici - param desta luta vitoriosa.

À Universidade Federal de Santa Catarina , que proporcionou os meios para a realização deste trabalho.

Aos meus filhos:

Ninéia e Júnior

R E S U M O

No presente trabalho, apresentamos a forma genérica do Binômio de Newton e estudamos alguns casos da desigualdade de Khinthines. De posse desses assuntos, apresentamos uma demonstração moderna do resultado original de Littlewood que trata de continuidade de formas bilineares em ℓ^{∞}. Com tal demonstração, apresentamos dois casos de condições suficientes para continuidade de formas bilineares no espaço ℓ^{p}: um quando $0 \leqq |\alpha| \leqq 1/2$ e outro quando $1/2 < |\alpha| \leqq 1$.

A B S T R A C T

In this dissertation, we present the generic form of Newton Binomial and study certain cases of Khintchies Inequality. Based on these studies, we present a modern proof of a result of Littlewood about the continuity of bilinear forms in ℓ^{∞}. Using this demonstration, we present two sufficient conditions for the continuity of bilinear forms in ℓ^{p}: one when $0 \leqq |\alpha| \leqq 1/2$ and the other when $1/2 < |\alpha| \leqq 1$.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, vamos descrever e demonstrar alguns resultados associados com um problema antigo (1930), proposto a Littlewood, por Daniel (Littlewood, 1930).

O problema consistia, então, na descrição de condições que deveriam satisfazer as entradas de uma matriz infinita que representasse uma forma bilinear em espaço de sucessões.

Aqui trabalhamos sobre o problema de extensão de certas restrições impostas aos espaços $\ell^p \times \ell^q$, com p e q maior ou igual que um, sobre os quais estão definidas as formas bilineares, que são basicamente:

$$1/p + 1/q \leq 1/2$$

Concentramos o nosso esforço em analisar as razões da restrição "menor ou igual a 1/2", tendo em vista uma generalização do resultado para valores maiores que 1/2. Trata-se basicamente de uma descrição de um artigo de Littlewood e Hardy, (1934).

No capítulo I, descrevemos suscintamente, sem demonstração, com ênfase nos espaços de Lebesgue, que é o nosso material de trabalho, todo o material de um curso básico de Análise Funcional.

No capítulo II, fizemos uma generalização do Binômio de Newton que é bem conhecido de todos que trabalham com multi-índices, mas cuja demonstração não temos conhecimento de existência na literatura. Precisamos desta generalização do Binômio de Newton para construir a demonstração de uma desigualdade devida a Khintchines, sobre funções que são combinações lineares de funções de Rademachers. Esta desigualdade é o ingrediente básico de uma demonstração moderna do resultado original de Littlewood que desenvolvemos no capítulo III.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

P R E L I M I N A R E S

Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais que necessitaremos no transcorrer de nosso trabalho. As demonstrações foram todas omitidas, mas deixamos indicado onde o leitor poderá encontrá-las.

Também as notações usuais de expoentes conjugados - foram mudadas (ver 1.1.1), conseqüentemente as dos espaços - $L^p(X)$ e ℓ^p (ver 1.2.2 e 1.3.2), pelo fato de no capítulo III trabalharmos constantemente com normas $\| . \|_p$, com igualdades e desigualdades destas e com vários sistemas de múltiplas equações, onde a maioria delas resulta diretamente da definição de expoentes conjugados. Por ser bem mais fácil trabalharmos com tais mudanças, resolvemos redefinir alguns conceitos tradicionais.

Por fim, chamamos a atenção para o fato de que a omissão do corpo K, siguinifica que os espaços vetoriais são considerados sobre o corpo dos números complexos.

(1.1) EXPOENTES CONJUGADOS

(1.1.1) Definição

Seja $0 \leqq s \leqq 1$. Indicamos por s' o elemento de $[0 , 1]$ tal que

$$s + s' = 1$$

Neste caso, diremos que s e s' são expoentes conjugados.

(1.2) ESPAÇO $L_s(X)$

(1.2.1) Proposição

Seja X um espaço vetorial mensurável, com medida μ positiva, f uma função complexa mensurável em X e seja $0 \leqq s \leqq 1$.

A aplicação

$$f \longmapsto \| f \|_s = \begin{cases} \left(\int_X |f|^{1/s} d\mu \right)^s & \text{se} \quad 0<s\leqq 1 \\ \operatorname*{Sup\ ess}_{t\in X} |f(t)| & \text{se} \quad s=0 \end{cases}$$

é uma norma. [10: 66-67]

(1.2.2) Definição

Denominamos de espaço $L_s(X)$, $0 \leqq s \leqq 1$, aos espaços usualmente chamados de espaço $L^p(X)$, $1 \leqq p < \infty$ e espaço $L^\infty(X)$, isto é, $L_s(X)$ é o espaço das funções de (1.2.1), a menos de uma relação de equivalência, tal que

$$\| f \|_s < \infty$$

(1.2.3) Proposição

(Desigualdade de Hölder para o Espaço $L_s(X)$)

Sejam r e s expoentes conjugados.

Se $f \in L_s(X)$ e $g \in L_r(X)$, então

$$\| f.g \|_1 \leqq \| f \|_s \cdot \| g \|_r$$

onde

$(f.g)(t) = f(t).g(t).$ [10: 67]

(1.2.4) <u>Proposição</u>

(Desigualdade de Minkowsky para $L_s(X)$)

Seja $0 \leqq s \leqq 1$.

Se $f \in L_s(X)$ e $g \in L_r(X)$, então

$$\| f + g \|_s \leqq \| f \|_s + \| g \|_s$$

onde

$(f + g)(t) = f(t) + g(t).$ [10: 68]

(1.3) ESPAÇO ℓ_s

(1.3.1) <u>Proposição</u>

Seja $0 \leqq s \leqq 1$ e seja $x = (x_n)_n \subset C$

A aplicação

$$x \longmapsto \| x \|_s = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{1/s} \right)^s & \text{se } 0 < s \leqq 1 \\ \sup_{n \in N} |x_n| & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

é uma norma. [1: 70-72]

(1.3.2) <u>Definição</u>

Denominamos de espaço ℓ_s, $0 \leq s \leq 1$, aos espaços usualmente conhecidos como ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ e ℓ^∞. Isto é,

$$\ell_s = \{ x = (x_n)_n \subset C; \quad \| x \|_s < \infty \}$$

(1.3.3) <u>Proposição</u>

(Desigualdade de Hölder para o Espaço ℓ_s)

Sejam r e s expoentes conjugados. Então, para todo $x = (x_n)_n \in \ell_s$ e para todo $y = (y_n)_n \in \ell_r$

$$\| x.y \|_1 \leq \| x \|_s \cdot \| y \|_r$$

onde

x.y representa o produto ponto a ponto de x por y.

[4: 160].

(1.3.4) <u>Proposição</u>

(Inversa da Desigualdade de Hölder em ℓ_s - Teorema de Landau)

Sejam r e s expoentes conjugados.

Se $x = (x_n)_n \in \ell_s$ e

$$x.y \in \ell_1$$

então

$$y = (y_n)_n \in \ell_r$$

Isto é,

se $\begin{cases} \| x \|_s \leq A \\ \| x.y \|_1 \leq A.B \end{cases}$ e

para todo $x \in \ell_s$

então

$$\| y \|_r \leqq B$$

ver [6]

(1.3.5) <u>Proposição</u>

(Desigualdade de Minkowsky para ℓ_s)

Seja $0 \leqq s \leqq 1$.

Se $x \in \ell_s$ e $y \in \ell_s$, então

$$\| x + y \|_s \leqq \| x \|_s + \| y \|_s$$

[4: 160]

(1.3.6) <u>Proposição</u>

(Desigualdade de Jensen)

Sejam r e s dois números reais tal que

$$0 \leqq r \leqq s \leqq 1$$

então

$$\| x \|_r \leqq \| x \|_s$$

onde

$$x = (x_n)_n \subset C \qquad [4: 70]$$

(1.4) ESPAÇO DE BANACH

(1.4.1) <u>Definição</u>

Seja E um espaço normado.

Diremos que E é um espaço de Banach se E é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplos:

1) $L_s(X)$ [10: 101]

2) ℓ_s [1: 66-67]

3) c_o [1: 61]

onde

$$c_o = \{ (x_n)_n \subset \mathbb{C};\ \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \}$$

(1.4.2) <u>Proposição</u>

Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo e $A: E \longmapsto F$ uma aplicação linear.

A é contínua na origem de E se, e somente se, existe um número positivo M tal que

$$\| A(x) \| \leqq M \| x \|$$

para todo x pertencente a E. [1: 80].

(1.4.3) <u>Proposição</u>

Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre o mesmo corpo e $A: E \longmapsto F$ uma aplicação linear.

Se A é contínua na origem de E, então A é contínua e uniformemente contínua em E. [5: 36]

(1.4.4) <u>Proposição</u>

Sejam E e F espaços vetoriais normados.

O conjunto de todas as aplicações lineares contínuas

$A: E \longmapsto F$ forma um espaço vetorial normado, denotado por $L(E,F)$, com a norma definida por

$$A \longmapsto \|A\| = \inf \{M > 0;\ \|A(x)\| \leq M \|x\|\}$$

Além disso,

as seguintes normas são equivalentes:

1) $\|A\| = \inf \{M > 0;\ \|A(x)\| \leq M \|x\|,\ x \in E\}$

2) $\|A\| = \{\sup \|A(x)\|;\ \|x\| \leq 1,\ x \in E\}$

3) $\|A\| = \{\sup \|A(x)\|;\ \|x\| = 1,\ x \in E\}$

[1: 81]

(1.5) ESPAÇO DUAL (TOPOLÓGICO)

(1.5.1) Definição

Seja E um espaço vetorial normado.

Denominamos de dual (topológico) E' de E ao espaço, $L(E, K)$, de todas as formas lineares contínuas em E.

(1.5.2) Observação

Vimos em (1.4.4) que uma norma em E' é a aplicação

$$S \longmapsto \|S\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |S(x)|$$

(1.5.3) Exemplos de Espaços Dual

1) O espaço dual de ℓ_s é $(\ell_s)' = \ell_r$, onde r e s são

expoentes conjugados. [1: 113].

2) O espaço dual de c_o é $(c_o)' = \ell_1$. [1: 114].

(1.5.4) Observação

O espaço

$$c_o \subset \ell_o$$

(1.6) MULTI-ÍNDICES

(1.6.1) Introdução

Um multi-índice é um elemento de N^n, isto é,

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \ ; \quad \beta_i \in N$$

Sobretudo, depois da invenção da teoria das distribuições, (1945), generalizou-se o uso dos multi-índices com o objetivo de criar-se uma notação adequada para "polinômios" em várias variáveis.

Aqui temos uma prova (Teorema - Binômio de Newton Generalizado) de como esta notação permite realmente escrever-se coisas de várias variáveis como se fosse de uma só variável.

Em conexão com os multi-índices surgem os multi-expoentes, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$. Eles permitirão que escrevemos, por exemplo,

$$\sum_{|\beta|=n} a_\beta x_\beta^\alpha \qquad (\beta \in N^n, \alpha \in R^n)$$

como sendo um polinômio em várias variáveis de ordem (grau) n.

(1.6.2) Noções e Notações Associadas aos Multi-Índices

Seja

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Denotaremos por:

1) $x_\beta = x_{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$

2) $\sum_\beta = \sum_{\beta_1} \sum_{\beta_2} \ldots \sum_{\beta}$

3) $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

4) $|\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$

5) $\alpha^\beta = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\beta_i}$

6) $\beta! = \prod_{i=1}^{n} \beta_i!$

7) $\binom{M}{\beta} = \dfrac{M!}{\beta!}$

8) $\sum_{|\beta|=M}$ = somatório sobre todos os β_i.

9) $\sum_{\beta_i} = \sum_{\beta_i=1}^{N_i}$

10) $\binom{M}{n} = \dfrac{M!}{(M-n)!n!}$

(1.7) DESIGUALDADE DE HÖLDER E MINKOWSKY GENERALIZADAS

(1.7.1) Proposição

(Desigualdade de Hölder Generalizada)

Sejam s_m, $m = 1,\ldots,M$, expoentes conjugados. Então , para todo $x_m = (x_{mn})_n \in \ell_{s_m}$, se tem:

$$\left\| \prod_{m=1}^{M} x_{mn} \right\|_1 \leq \prod_{m=1}^{M} \| x_{mn} \|_{s_m}$$

[ver 9]

(1.7.2) Proposição

(Desigualdade de Minkowsky Generalizada)

Seja $0 \leq s \leq 1$, $m = 1,\ldots,M$. Então, para todo $x_m = (x_{mn})_n \in \ell_s$, se tem

$$\left\| \sum_{m=1}^{M} x_{mn} \right\|_s \leq \sum_{m=1}^{M} \| x_{mn} \|_s$$

[ver 7]

CAPÍTULO II

DESIGUALDADE DE KHINTCHINES

(2.1) Introdução

Esta desigualdade estabelece a equivalência das normas $\| \cdot \|_s$ e $\| \cdot \|_r$ para um subespaço denso de $L_{m,t}([0, 1])$, t qualquer. O referido subespaço é gerado pelas funções de Rademachers (ver 2.4). Vamos utilizar neste trabalho, esta equivalência, no caso $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_{1/2}$.

(2.2) Generalização do Binômio de Newton

Seja $\alpha = (\alpha_1 , \alpha_2) \in R^2$ e $\beta = (\beta_1 , \beta_2) \in N^2$

Consideremos a fórmula de Newton

(2.2.1) $$(\alpha_1 + \alpha_2)^M = \sum_{p=0}^{M} \binom{M}{p} \alpha_1^{M-p} . \alpha_2^p$$

Fazendo

$$\beta_1 = M - p$$

$$\beta_2 = p$$

temos

1) $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 = M$

2) $\binom{M}{p} = \binom{M}{\beta}$

3) $\alpha_1^{M-p} . \alpha_2^p = \alpha^\beta$

E, observando que:

$\sum_{p=0}^{M}$ representa a soma relativa a todas as possibilidades de $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ tal que $|\beta| = M$

o que nos permite escrever

$$(2.2.2) \qquad (\alpha_1 + \alpha_2)^M = \sum_{|\beta|=M} \binom{M}{\beta} \alpha^\beta$$

Esta formulação do teorema do Binômio nos induz a seguinte generalização:

(2.2.3) Teorema

(Binômio de Newton Generalizado)

Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C^n$,

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N^n$

Então

$$|\alpha|^M = \sum_{|\beta|=M} \binom{M}{\beta} \alpha^\beta$$

onde

$\sum_{|\beta|=M}$ representa a soma relativa a todas as possibilidades de β, com $|\beta| = M$. [ver 9].

(2.3) Relação Entre as Linhas do Binômio de Ordem n e 2n

Dadas duas linhas do chamado "triângulo de Pascal"

$$(2.3.1) \qquad L_{2n} = \binom{2n}{0} \ldots \binom{2n}{2p} \ldots \binom{2n}{2n}$$

e

$$L_n = \binom{n}{0} \ldots . \binom{n}{p} \ldots . \binom{n}{p}$$

"sincronizados" pelo índice p, podemos encontrar uma constante C_n tal que

$$(2.3.2) \qquad \binom{2n}{2n} = C_n \binom{n}{p}$$

Evidentemente,

$$(2.3.3) \qquad C_n = \operatorname*{Max}_{p} \frac{\binom{2n}{2p}}{\binom{n}{p}}$$

Uma expressão para C_n pode ser obtida usando-se a fórmula de Stirling

$$(2.3.4) \qquad C_n \cong (2n/e)^n$$

[ver 9]

Podemos generalizar a estimativa feita entre L_{2n} e L_n se considerarmos, agora, o polinômio de Newton generalizado, comparando os hiperplanos P_{2n} e P_n

$$(2.3.5) \qquad C_n = \operatorname*{Max}_{|\beta|=M} \frac{\binom{2M}{2\beta}}{\binom{M}{\beta}}$$

Novamente aqui, poderemos obter com o auxílio da fórmula de Stirling:

$$(2.3.6) \qquad C_n \cong 2(2n/e)^n$$

[ver 9]

(2.4) Funções de Rademachers e Desigualdade de Khintchines

Definimos uma família de funções

$$(r_k : [0 , 1] \longmapsto \{ -1 , 1\})_{k \quad N}$$

(2.4.1) $$r_k(t) = \sum_{p=0}^{2^k-1} (-1)^p \chi_{\left[\frac{p}{2^k} , \frac{p+1}{2^k}\right)}$$

onde χ representa a função característica.

Entre outras propriedades da família $(r_k)_{k \in N}$ temos:

(2.4.2) $$\int r_k(t)\, dt = 0$$

(2.4.3) $$\int r_k^2(t)\, dt = 1$$

(2.4.4) $$\int r_j(t).r_k(t)\, dt = \delta_{jk} \qquad j,k \in N$$

Seja

(2.4.5) $$E = (r_k)_{k \in N}$$

o espaço vetorial gerado por $(r_k)_k$. Então

(2.4.6) $$f \in E, \qquad f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j r_{k_j}$$

(2.4.7) Teorema

Seja f uma função definida por (2.4.6).

Então

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2}$$

Demonstração

Temos que

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j r_{k_j}(t)\Big)^2 dt \qquad \text{[ver 1.2.1]}$$

$$= \int_0^1 \Big(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2 r_{k_j}(t) + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \alpha_i r_{k_j}(t) r_{k_i}(t)\Big) dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2 r_{k_j}^2(t)\,dt + \int_0^1 \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \alpha_i r_{k_j}(t) r_{k_i}(t)\,dt$$

(2.4.3-4)

$$= \sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2$$

Portanto, o teorema.

PRIMEIRA FORMA DA DESIGUALDADE DE KHINTCHINES

(2.4.8) Teorema

Seja f uma função definida por (2.4.6).

Então,

$$\|f\|_{1/2n} \leq K_{2n} \|f\|_{1/2}$$

Demonstração

(2.4.9) $$\|f\|_{1/2n}^{2n} \overset{(1.2.1)}{=} \int_0^1 |f(t)|^{2n} dt$$

$$\overset{(2.4.6)}{=} \int_0^1 \left| \sum_{j=0}^{N} \alpha_j r_{k_j}(t) \right|^{2n} dt$$

$$\overset{(2.2.3)}{=} \int_0^1 \sum_{|\beta|=2n} \binom{2n}{\beta} \alpha^{\beta} r_k^{\beta}(t) dt$$

onde $r_k = (r_{k_1}, \ldots, r_{k_N})$

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$

$$= \int_0^1 \sum_{|\beta|=n} \binom{2n}{2\beta} \alpha^{2\beta} r_k^{2\beta}(t) dt$$

$$\overset{(2.4.4)}{=} \sum_{|\beta|=n} \binom{2n}{2\beta} \alpha^{2\beta}$$

$$\overset{(2.3.5)}{\leq} C_n \sum_{|\beta|=n} \binom{n}{\beta} \alpha^{2\beta}$$

$$= C_n \sum_{|\beta|=n} \binom{n}{\beta} (\alpha^2)^{\beta}$$

$$\overset{(2.2.3)}{=} C_n |\alpha^2|^n$$

$$\overset{(1.6.2\text{-}3)}{=} \quad C_n \left(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j^2 \right)^n$$

$$\overset{(2.4.7)}{=} \quad C_n \left(\|f\|_{1/2}^2 \right)^n$$

$$= \quad C_n \|f\|_{1/2}^{2n}$$

Fazendo:

(2.4.9.1) $\qquad C_n = (K_{2n})^{2n}$

e substituindo na igualdade acima, teremos assim, concluído a demonstração do teorema (2.4.8).

SEGUNDA FORMA DA DESIGUALDADE DE KHINTCHINES

(2.3.10) Teorema

Seja f uma função definida por (2.4.6).

Então:

$$\|f\|_{1/2} \leqq K_1 \|f\|_1$$

Demonstração

(2.4.11) $\qquad \|f\|_{1/2}^2 \overset{(1.2.1)}{=} \int_0^1 |f(t)|^2 dt$

$$= \int_0^1 |f(t)|^{(\eta+\delta)} dt$$

onde $\eta + \delta = 2$

$$= \int_0^1 |f(t)|^{\eta} |f(t)|^{\delta} dt$$

$$\overset{(1.2.3)}{=} \left(\int_0^1 |f(t)|^{\eta/s} dt\right)^s \left(\int_0^1 |f(t)|^{\delta/s'} dt\right)^{s'}$$

onde $s + s' = 1$

Fazendo: $\eta/s = 4$

$\delta/s' = 1$

$$= \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^s \left(\int_0^1 |f(t)| dt\right)^{s'}$$

$$\overset{(1.2.1)}{=} \|f\|_{1/4}^{4s} . \|f\|_1^{s'}$$

$$\overset{(2.4.8)}{\leqq} (K_4 \|f\|_{1/2})^{4s} \|f\|_1^{s'}$$

$$= K_4^{4s} \|f\|_{1/2}^{4s} \|f\|_1^{s'}$$

Portanto,

$$\|f\|_{1/2}^{(2-4s)/s'} \leqq K_4^{4s/s'} \|f\|_1 \tag{2.3.12}$$

Consideremos, agora, o sistema:

1) $\eta + \delta = 2$

2) $s + s' = 1$

3) $\eta/s = 4$

4) $\delta/s' = 1$

Resolvendo-o, encontramos os seguintes resultados:

1) $(2-4s)/s' = 1$

2) $4s/s' = 2$

Substituindo estes resultados em (2.3.12) e fazendo

$$(K_1)^2 = C_2 \overset{(2.4.9.1)}{=} K_4^4$$

teremos, portanto, concluído a demonstração.

CAPÍTULO III

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA CONTINUIDADE DE FORMAS BILINEARES NO ESPAÇO ℓ_s

(3.1) Introdução

Em 1930, em um artigo, Littlewood mencionou um problema que lhe fora proposto por Daniel. Tratava-se de obter condições sobre os coeficientes de uma matriz infinita que representasse uma forma bilinear em "um número infinito de variáveis". O interesse em um tal problema se encontra em que, formalmente, ele pode representar uma generalização do teorema de Landau para formas multilineares.

Aqui tratamos de alguns casos relacionados com restrições ao multi-expoentes $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ que define $(\alpha) = \ell_{\alpha_1} x \ldots x \ \ell_{\alpha_n}$.

(3.2) Observação

Os itens relacionados abaixo são multi-índices e notações a eles associadas, adotadas no transcorrer do capítulo. Tais itens, normalmente, fazem parte da hipótese - dos lemas e teoremas apresentados neste capítulo. Por isso, para maior facilidade do leitor, indicaremos , apenas o número (3.2) quando este conjunto de itens se fizer necessário.

1) $A: \ell_{\alpha_1} \times \ell_{\alpha_2} \longmapsto C$ é uma forma bilinear

limitada por M, definida por $A(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}) = \sum_{\beta} a_\beta x_{\beta_1} x_{\beta_2}$ e de matriz (a_β).

2) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \longmapsto [0, 1] \times [0, 1]$

3) $i \neq j = 1, 2$

4) $(x_{\beta_i})_{\beta_i} \in \ell_{\alpha_i}$ de norma 1

5) $\alpha_i' = 1 - \alpha_i$ é o expoente conjugado de α_i

6) $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in N^2$

(3.3) Teorema

(Condições Suficientes para Continuidade de Formas Bilineares em ℓ_s - 1º caso)

Suponhamos que (3.2) seja satisfeito e que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Então:

$$\sum_{\beta_i} \left(\sum_{\beta_j} | a_\beta |^2\right)^{1/2} \leqq KM \tag{3.3.1}$$

$$\left(\sum_{\beta} | a_\beta |^{4/3}\right)^{3/4} \leqq KM \tag{3.3.2}$$

Demonstração

Demonstremos inicialmente (3.3.1)

$$M = \operatorname{Sup} \left| \sum_{\beta} a_\beta x_{\beta_i} x_{\beta_j} \right|$$

$$\overset{(1.6.2.2)}{=} \operatorname{Sup} \left| \sum_{\beta_i} \sum_{\beta_j} a_\beta x_{\beta_i} x_{\beta_j} \right|$$

$$= \operatorname{Sup} \left| \sum_{\beta_i} x_{\beta_i} \sum_{\beta_j} a_\beta x_{\beta_j} \right|$$

Fazendo: $$Y_{\beta_i} = \sum_{\beta_j} a_\beta x_{\beta_j}$$

e substituindo na igualdade acima, vem que:

$$(3.3.3) \qquad M = \operatorname{Sup} \Big|\sum_{\beta_i} x_{\beta_i} Y_{\beta_i}\Big|$$

Fazendo, agora,

$$x_{\beta_i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad Y_{\beta_i} \geqq 0 \\ -1 & \text{se} \quad Y_{\beta_i} < 0 \end{cases}$$

e substituindo em (3.3.3), vem que:

$$(3.3.4) \qquad M = \operatorname{Sup} \sum_{\beta_i} \Big| \sum_{\beta_j} a_\beta x_{\beta_j}\Big|$$

Fazendo:

$$(x_{\beta_j})_{\beta_j} = (r_{\beta_j})_{\beta_j} \qquad [\text{ver } (2.4.1)]$$

em (3.3.4), teremos:

$$(3.3.5) \qquad M \geqq \operatorname{Sup} \sum_{\beta_i} \Big|\sum_{\beta_j} a_\beta r_{\beta_j}\Big|$$

$$\overset{*}{\geqq} \int_0^1 \sum_{\beta_i} \Big|\sum_{\beta_j} a_\beta r_{\beta_j}(s)\Big| ds$$

$$= \sum_{\beta_i} \int_0^1 \Big|\sum_{\beta_j} a_\beta r_{\beta_j}(s)\Big| ds$$

$$\overset{(1.2.1)}{=} \sum_{\beta_i} \|f\|_1$$

---

* Ver [10: 30]

$$\overset{(2.3.10)}{\geq} \sum_{\beta_i} (1/K_1)\, \|f\|_{1/2}$$

$$= (1/K_1) \sum_{\beta_i} \|f\|_{1/2}$$

$$\overset{(2.4.7)}{=} (1/K_1) \sum_{\beta_i} \Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2\Big)^{1/2}$$

Fazendo $K_1 = K$, em (3.3.5), concluiremos a demonstração da primeira parte do teorema - (3.3.1).

<u>Agora, demonstraremos (3.3.2)</u>

$$(3.3.6) \qquad \sum_{\beta} |a_\beta|^{\mu} = \sum_{\beta_i} \sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\delta + \eta}$$

$$\delta + \eta = \mu$$

$$= \sum_{\beta_i} \sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\delta} |a_\beta|^{\eta}$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leq} \sum_{\beta_i} \Big[\Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\delta/s}\Big)^{s} . \Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\eta/s'}\Big)^{s'}\Big]$$

$$s + s' = 1$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leq} \Big[\sum_{\beta_i} \Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\delta/s}\Big)^{s/t}\Big]^{t} \Big[\sum_{\beta_i} \Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\eta/s'}\Big)^{s'/t'}\Big]^{t'}$$

$$t + t' = 1$$

Fazendo: 1) $\delta/s = 2$

2) $s/t = 1/2$

3) $\eta/s' = 1$

4) $s'/t' = 2$

em (3.3.6) teremos:

$$(3.3.7) \qquad \sum_{\beta} |a_\beta|^\mu \leq \Big[\sum_{\beta_i}\Big(\sum_{\beta_j}|a_\beta|^2\Big)^{1/2}\Big]^t \Big[\sum_{\beta_i}\Big(\sum_{\beta_j}|a_\beta|\Big)^2\Big]^{t'}$$

$$\overset{(3.3.1)}{\leq} (KM)^t \Big[\sum_{\beta_i}\Big(\sum_{\beta_j}|a_\beta|\Big)^2\Big]^{t'}$$

$$\overset{(1.7.2)}{\leq} (KM)^t \Big[\sum_{\beta_j}\Big(\sum_{\beta_i}|a_\beta|^2\Big)^{1/2}\Big]^{2t'}$$

$$\overset{(3.3.1)}{=} (KM)^t (KM)^{2t'}$$

$$= (KM)^{t+2t'}$$

Agora, resolvendo o sistema abaixo:

1) $t + t' = 1$

2) $s + s' = 1$

3) $\delta/s = 2$

4) $\eta/s' = 1$

5) $s/t = 1/2$

6) $s'/t' = 2$

7) $\delta + \eta = \mu$

encontramos:

$$\mu = t + 2t' = 4/3$$

Substituindo este resultado em (3.3.7), concluiremos (3.3.2)e, portanto, o teorema.

(3.4) Lema

Suponhamos que (3.2) seja satisfeito e que $\alpha_i \leqq 1$, Então:

(3.4.1) $$\sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{1/2\alpha_i'} \leqq (KM)^{1/\alpha_i'}$$

Demonstração

Fixamos o par $(x_{\beta_i}, x_{\beta_j}) \in \ell_{\alpha_i} \times \ell_{\alpha_j}$

e definimos:

$$A': \ell_o \times \ell_o \longmapsto c_o$$

$$A'(z_{\beta_1}, z_{\beta_2}) = \sum_\beta a_\beta x_{\beta_1} x_{\beta_2} z_{\beta_1} z_{\beta_2}$$

limitada por M. Donde,por (3.3.1), temos:

(3.4.2) $$\sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2 |x_{\beta_i}|^2)^{1/2}$$

$$= \sum_{\beta_i} |x_{\beta_i}| (\sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^2 |a_\beta|^2)^{1/2}$$

$$\leqq \quad KM$$

Por hipótese:

$$\sum_{\beta_i} |x_{\beta_i}|^{1/\alpha_i} \leq 1 \tag{3.4.3}$$

Juntando (3.4.2) e (3.4.3), teremos:

$$\begin{cases} \sum_{\beta_i} |x_{\beta_i}| (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{1/2} \leq KM \\ \\ \sum_{\beta_i} |x_{\beta_i}|^{1/\alpha_i} \leq 1 \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Agora, aplicando (1.3.4) em (3.4.4), chegaremos ao término da demonstração do lema.

(3.5) <u>Lema</u>

Suponhamos que (3.2) seja satisfeito e que $\alpha_i \leq 1/2$. Então:

$$\sum_{\beta_j} [\sum_{\beta_i} (|a_\beta|^2)/A_{\beta_i}^{(2\alpha_i'-1)/\alpha_i'}]^{\lambda\alpha_i'} \leq (KM)^\lambda \tag{3.5.1}$$

onde:

$$A_{\beta_i} = (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2)^{1/2} \tag{3.5.2}$$

$$A_{\beta_j} = (\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2)^{1/2} \tag{3.5.3}$$

<u>Demonstração</u>

Seja:

(3.5.4) $$u = (2\alpha_i' - 1)/2\alpha_i'$$

(3.5.5) $$u' = 1/2\alpha_i'$$

Então:

(3.5.6) $$u + u' = 1$$

Seja, agora:

(3.5.7) $$\|\eta_{\beta_j}\|_u = (|a_\beta|/A_{\beta_i})^{2u}$$

Então:

(3.5.8) $$\|\eta_{\beta_j}\|_u \overset{(1.3.1)}{=} (\sum_{\beta_j} \eta_{\beta_j}^{1/u})^u$$

$$\overset{(3.5.7)}{=} \{\sum_{\beta_j} [(|a_\beta|/A_{\beta_i})^{2u}]^{1/u}\}^u$$

$$= (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2/A_{\beta_i}^2)^u$$

$$\overset{(3.5.2)}{=} [\sum_{\beta_j} (|a_\beta|^2/\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2)]^u$$

$$= 1$$

Seja:

$$(3.5.9) \qquad (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{1/2} = V_{\beta_i}$$

Então:

$$(3.5.10) \qquad \| (|a_\beta||x_{\beta_j}|)^{2u'} \|_{u'}$$

$$\overset{(1.3.1)}{=} \{\sum_{\beta_j} [(|a_\beta||x_{\beta_j}|)^{2u'}]^{1/u}\}^{u'}$$

$$= (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{u'}$$

$$\overset{(3.5.9)}{\leq} V_{\beta_i}^{2u'}$$

Portanto:

$$(3.5.11) \qquad \sum_{\beta_j} \sum_{\beta_i} [(|a_\beta|^2/A_{\beta_i}^{2u}) |x_{\beta_j}|^{2u'}]$$

$$\overset{(3.5.6)}{=} \sum_{\beta_i} [\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{2(u+u')} |x_{\beta_j}|^{2u'}/A_{\beta_i}^{2u}]$$

$$\overset{(1.3.1)}{=} \sum_{\beta_i} \| (|a_\beta|/A_{\beta_i})^{2u} (|a_\beta||x_{\beta_j}|)^{2u'} \|_1$$

$$\overset{(3.5.7)}{=} \sum_{\beta_i} \| \eta_{\beta_j} (|a_\beta x_{\beta_j}|)^{2u'} \|_1$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leq} \sum_{\beta_i} \| \eta_{\beta_j} \|_u \, \| (|a_\beta||x_{\beta_j}|)^{2u'} \|_{u'}$$

$$\overset{(3.5.7\text{-}10)}{=} \quad \sum_{\beta_i} (1.V_{\beta_i}^{2u'})$$

$$\overset{(3.5.5\text{-}9)}{=} \quad \sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{1/2\alpha_i'}$$

$$\overset{(3.4.1)}{\leqq} \quad (KM)^{1/\alpha_i'}$$

$$\overset{(3.5.5)}{=} \quad (KM)^{2u'}$$

Também:

$$(3.5.12) \qquad (\sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{1/\alpha_j})^{\alpha_j} = 1$$

e fazendo $r = 2u'\alpha_j$, em (3.5.12), teremos:

$$(3.5.13) \qquad [\sum_{\beta_j} (|x_{\beta_j}|^{2u'})^{1/r}]^r = (\sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{2u'/r})^r$$

$$= (\sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{1/\alpha_j})^{\alpha_j}$$

$$\leqq 1$$

Agora, juntando (3.5.11) e (3.5.13) e aplicando

(1.3.4), temos:

$$(3.5.14) \qquad \sum_{\beta_j} \left(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2 / A_{\beta_i}^{2u}\right)^{1/r'} \leqq (KM)^{2u'/r'}$$

Fazendo: $1/r' = \lambda\alpha_i'$ em (3.5.14), teremos:

$$(3.5.15) \qquad \sum_{\beta_j} \left[\sum_{\beta_i} \left(|a_\beta|^2 / A_{\beta_i}^{(2\alpha_i'-1)/\alpha_i'}\right)\right]^{\lambda\alpha_i'}$$

$$\overset{(3.5.4)}{=} \sum_{\beta_j} \left(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2 / A_{\beta_i}^{2u}\right)^{1/r'}$$

$$\overset{(3.5.14)}{\leqq} (KM)^{2u'/r'}$$

$$\overset{(3.5.5)}{=} (KM)^{\lambda}$$

Concluimos, assim, a demonstração do lema.

(3.6) <u>Teorema</u>

(Condições Suficientes para Continuidade de Formas Bilineares em ℓ_s - 2º caso)

Suponhamos que (3.2) seja satisfeita e que $0 \leqq |\alpha| \leqq 1/2$. Então:

$$(3.6.1) \qquad \sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2\Big)^{\lambda/2} \leq (KM)^\lambda$$

$$(3.6.2) \qquad \sum_{\beta} |a_\beta|^\mu \leq (KM)^\mu$$

onde $\lambda = 1/(1-|\alpha|)$ e $\mu = 4/(3-2|\alpha|)$

Demonstração

Demonstremos inicialmente (3.6.1).

Sejam A_{β_i} e A_{β_j} como em (3.5.2) e (3.5.3), respectivamente. Então:

$$(3.6.3) \qquad \sum_{\beta_i} A_{\beta_i} = \sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda-2} A_{\beta_i}^2$$

$$\overset{(3.5.2)}{=} \sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda-2} \sum_{\beta_j} |a_\beta|^2$$

$$= \sum_{\beta_j} \sum_{\beta_i} \big(|a_\beta|^{2(\rho+\rho')}/A_{\beta_i}^{2-\lambda}\big)$$

onde $\rho + \rho' = 1$

$$= \sum_{\beta_j} \sum_{\beta_i} \big(|a_\beta|^{2\rho}/A_{\beta_i}^{2-\lambda}\big) |a_\beta|^{2\rho'}$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leq} \sum_{\beta_j} \Big[\sum_{\beta_i} \big(|a_\beta|^2/A_{\beta_i}^{(2-\lambda)/\rho}\big) \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2\Big)^{\rho'}$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leq} \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2/A_{\beta_i}^{(2-\lambda)/\rho}\Big)^{\rho/\sigma}\Big]^\sigma \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2\Big)^{\frac{\rho'}{\sigma'}}\Big]^{\sigma'}$$

onde $\sigma + \sigma' = 1$

Fazendo:

1) $(2-\lambda)/\rho = (2\alpha_i'-1)/\alpha_i'$

2) $\rho/\sigma = \lambda/\alpha_i'$

encontramos

3) $\rho'/\sigma = \lambda/2$

Substituindo os intens acima em (3.6.3), temos:

(3.6.4) $$\sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda}$$

$$\leq \left[\sum_{\beta_j}\left(\sum_{\beta_i}|a_\beta|^2/A_{\beta_i}^{(2\alpha_i'-1)/\alpha_i'}\right)^{\lambda\alpha_i'}\right]^{\sigma}\left[\sum_{\beta_j}\left(\sum_{\beta_i}|a_\beta|^2\right)^{\lambda/2}\right]^{\sigma'}$$

$$\overset{(3.5.1-3)}{\leq} (KM)^{\lambda\sigma}\left(\sum_{\beta_j} A_{\beta_j}^{\lambda}\right)^{\sigma'}$$

Analogamente, obtemos:

(3.6.5) $$\sum_{\beta_j} A_{\beta_j} \leq (KM)^{\lambda\tau}\left(\sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda}\right)^{\tau'}$$

onde:

1) $\tau + \tau' = 1$

2) $\theta + \theta' = 1$

3) $(2\alpha_j'-1)/\alpha_j' = (2-\lambda)/\theta$

4) $\theta/\tau = \lambda\alpha_j'$

Substituindo (3.6.4) em (3.6.5) vem:

$$\text{(3.6.6)} \qquad \sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j} \leqq (KM)^{\lambda\tau}[(KM)^{\lambda\sigma}(\sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j})^{\sigma'}]^{\tau'}$$

$$= (KM)^{\lambda\tau}(KM)^{\lambda\sigma\tau'}(\sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j})^{\sigma'\tau'}$$

Donde

$$\text{(3.6.7)} \qquad \sum_{\beta_j}(\sum_{\beta_i}|a_\beta|^2)^{\lambda/2} \overset{(3.5.2)}{=} (\sum_{\beta_j} A_{\beta_j})^{\lambda(\tau+\sigma\tau')/(1-\sigma'\tau')}$$

$$\leqq (KM)^{\lambda(\tau+\sigma\tau')/(1-\sigma'\tau')}$$

Agora, resolvendo o sistema abaixo:

1) $\rho + \rho' = 1$

2) $\sigma + \sigma' = 1$

3) $\theta + \theta' = 1$

4) $\tau + \tau' = 1$

5) $(2-\lambda)/\rho = (2\alpha_i'-1)/\alpha_i'$

6) $(2-\lambda)/\theta = (2\alpha_j'-1)/\alpha_j'$

7) $\rho/\sigma = \lambda\alpha_j'$

8) $\theta/\tau = \lambda\alpha_i'$

e lembrando que, por hipótese, $0 \leqq |\alpha| \leqq 1/2$, encontramos os seguintes resultados:

$$(3.6.8) \qquad 1)\ (\tau+\sigma\tau')/(1-\sigma'\tau') \;=\; 1$$

$$2)\ \lambda \;=\; 1/(1-|\alpha|)$$

Substituindo estes resultados em (3.6.7), concluíremos assim, a primeira parte do teorema.

Demonstraremos a seguir o item (3.6.2).

$$(3.6.9) \qquad \sum_{\beta} |a_{\beta}|^{\mu}$$

$$= \sum_{\beta_j}\sum_{\beta_i} |a_{\beta}|^{(\eta+\xi)}$$

onde $\eta + \xi = \mu$

$$= \sum_{\beta_j}\sum_{\beta_i} |a_{\beta}|^{\eta}|a\ |^{\xi}$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leqq} \sum_{\beta_j} [(\sum_{\beta_i} |a_{\beta}|^{\eta/s})^{s}(\sum_{\beta_i} |a_{\beta}|^{\xi/s'})^{s'}]$$

onde $s + s' = 1$

$$\overset{(1.3.3)}{\leq} \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^{\eta/s}\Big)^{s/t}\Big]^{t} \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^{\xi/s'}\Big)^{s'/t'}\Big]^{t'}$$

onde $t + t' = 1$

Fazendo:

1) $\eta/s = 2$

2) $s/t = \lambda/2$

3) $\xi/s' = \lambda$

4) $s'/t' = 2/\lambda$

e substituindo em (3.6.9), vem que:

$$(3.6.10) \quad \sum_{\beta} |a_\beta|^{\mu} \leq \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^{2}\Big)^{\lambda/2}\Big]^{t} \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^{\lambda}\Big)^{2/\lambda}\Big]^{t'}$$

$$\overset{(1.7.2)}{\leq} \Big[\sum_{\beta_j} \Big(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^{2}\Big)^{\lambda/2}\Big]^{t} \Big[\sum_{\beta_i} \Big(\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{2}\Big)^{\lambda/2}\Big]^{2t'/\lambda}$$

$$\overset{(3.6.1)}{\leq} (KM)^{\lambda t} (KM)^{2t'}$$

$$= (KM)^{(\lambda t + 2t')}$$

Agora, resolvendo o sistema abaixo:

1) $s + s' = 1$

2) $t + t' = 1$

3) $s/t = \lambda/2$

4) $\xi/s' = \lambda$

5) $\eta/s = 2$

6) $s'/t' = 2/\lambda$

7) $\mu = \eta + \xi$

encontramos:

$$\mu = \lambda t + 2t' = 4/(3-2|\alpha|)$$

Agora, substituindo este resultado em (3.6.10), concluiremos a demonstração da segunda parte do teorema.

(3.7) Teorema

(Condições Suficientes para Continuidade de Formas Bilineares em ℓ_s - 3º caso)

Suponhamos que (3.2) seja satisfeito e que $1/2 \leqq |\alpha| \leqq 1$. Então:

(3.7.1) $$\sum_{\beta_j} \left(\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2\right)^{\lambda/2} \leqq (KM)^\lambda$$

(3.7.2) $$\sum_{\beta} |a_\beta|^\lambda \leqq (KM)^\lambda$$

onde $\lambda = 1/(1-|\alpha|) \geqq 2$

Demonstração

Inicialmente , demonstraremos o item (3.7.1).

Sejam A_{β_i} e A_{β_j} como em (3.5.2) e (3.5.3), respectivamente. Então:

$$(3.7.3) \qquad \sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{\theta} A^2_{\beta_j}$$

$$\overset{(3.5.3)}{=} \sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{\theta} \sum_{\beta_i} |a_\beta|^2$$

$$= \sum_{\beta_i}\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^{\theta}$$

$$= \sum_{\beta_i}\sum_{\beta_j} |a_\beta|^{\theta} |x_{\beta_j}|^{\theta} |a_\beta|^{2-\theta}$$

$$\overset{(1.3.3)}{\leqq} \sum_{\beta_i} \{[\sum_{\beta_j} (|a_\beta||x_{\beta_j}|)^2]^{\theta/2} [\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2]^{(2-\theta)/2}\}$$

onde $\theta/2 + (2-\theta)/2 = 1$

$$\overset{(1.3.3)}{\leqq} [\sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{\theta/2\rho}]^{\rho} [\sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2)^{(2-\theta)/2\rho'}]^{\rho'}$$

onde $\rho + \rho' = 1$

Fazendo:

1) $\theta/2\rho = 1/2\alpha_i'$

2) $(2-\theta)/2\rho' = \lambda/2$

e substituindo em (3.7.3), temos:

$$\sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{\theta} A^2_{\beta_j} \tag{3.7.4}$$

$$\leq \quad [\sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2 |x_{\beta_j}|^2)^{1/2\alpha'_i}]^{\theta\alpha'_i} [\sum_{\beta_i} (\sum_{\beta_j} |a_\beta|^2)^{\lambda/2}]^{(2-\theta)/\lambda}$$

$$\overset{(3.4.1)}{\leq} \quad (KM)^{\theta} (\sum_{\beta_i} A^{\lambda}_{\beta_i})^{(2-\theta)/\lambda}$$

Por hipótese:

$$\sum_{\beta_j} (|x_{\beta_j}|^{\theta})^{1/\theta\alpha_j} = \sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{1/\alpha_j} \leq 1 \tag{3.7.5}$$

Juntando (3.7.4) e (3.7.5), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta_j} |x_{\beta_j}|^{\theta} A^2_{\beta_j} \leq (KM)^{\theta} (\sum_{\beta_i} A^{\lambda}_{\beta_i})^{(2-\theta)/\lambda} \\ \\ \sum_{\beta_j} (|x_{\beta_j}|^{\theta})^{1/\theta\alpha_j} \leq 1 \end{array} \right. \tag{3.7.6}$$

Aplicando (1.3.4) em (3.7.6), temos:

$$\sum_{\beta_j} A^{2/(1-\theta\alpha_j)}_{\beta_j} \tag{3.7.7}$$

$$= \sum_{\beta_j} (A^2_{\beta_j})^{1/(1-\theta\alpha_j)}$$

onde $\theta\alpha_j + (1-\theta\alpha_j) = 1$

$$\leq \quad [(KM)^{\theta}(\sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda})^{(2-\theta)/\lambda}]^{1/(1-\theta\alpha_j)}$$

Agora, fazendo:

$$\lambda \quad = \quad 2/(2-\theta\alpha_j)$$

e substituindo em (3.7.7), temos:

$$(3.7.8) \qquad \sum_{\beta_j} A_{\beta_j}^{\lambda} \quad \leq \quad (KM)^{\lambda\theta/2}(\sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda})^{(2-\theta)/2}$$

De modo análogo, obtemos:

$$(3.7.9) \qquad \sum_{\beta_i} A_{\beta_i}^{\lambda} \quad \leq \quad (KM)^{\lambda\tau/2}(\sum_{\beta_j} A_{\beta_j}^{\lambda})^{(2-\tau)/2}$$

Onde:

(3.7.10)

1) $\sigma + \sigma' = 1$

2) $\tau/2 + (2-\tau)/2 = 1$

3) $\tau/2\sigma = 1/2\alpha_j'$

4) $(1-\tau\alpha_i) + \tau\alpha_i = 1$

5) $2/(2-\tau\alpha_i) = \lambda$

6) $(2-\tau)/2\sigma' = \lambda/2$

Substituindo (3.7.9) em (3.7.8), temos:

$$(3.7.11) \qquad \sum_{\beta_j} A_{\beta_j}^{\lambda} \quad \leq$$

$$\leq \quad (KM)^{\lambda\theta/2}[(KM)^{\lambda\tau/2}(\sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j})^{(2-\tau)/2}]^{(2-\theta)/2}$$

$$= \quad (KM)^{\lambda(2\theta+2\tau-\theta\tau)/4}(\sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j})^{(4-2\theta-2\tau+\theta\tau)/4}$$

Donde

$$(3.7.12) \qquad (\sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j})^{(2\theta+\ 2\tau-\theta\tau)/4} \quad \leq \quad (KM)^{\lambda(2\theta+2\tau-\theta\tau)/4}$$

Pontanto:

$$(3.7.13) \qquad \sum_{\beta_j}(\sum_{\beta_i}|a\ |^2)^{\lambda/2} \overset{(3.5.3)}{=} \sum_{\beta_j} A^{\lambda}_{\beta_j}$$

$$\overset{(3.7.12)}{\leq} \quad (KM)^{\lambda}$$

Concluímos, assim, a demonstração da primeira parte do teorema, isto é, do item (3.7.1).

Demonstraremos, a seguir, o item (3.7.2).

Lembrando que, por hpótese $\lambda \geq 2$, donde:

$$2/\lambda \leq 1$$

Então:

$$\sum_{\beta} |a_\beta|^\lambda \overset{(1.6.2\text{-}2)}{=} \sum_{\beta_j} [\sum_{\beta_i} (|a_\beta|^2)^{\lambda/2}]$$

$$\overset{(1.3.6)}{\leq} \sum_{\beta_j} (\sum_{\beta_i} |a_\beta|^2)^{\lambda/2}$$

$$\overset{(3.7.1)}{\leq} (KM)^\lambda$$

Concluímos aqui a demonstração de (3.7.2) e, portanto, o teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABUABARA, T. e JESMES, J. Elementos de análises funcional. A Aparecer.

[2] HARDY, G. and LITTLEWWOD, J.E. Bilinear forms bounded in Space ℓ^p x ℓ^q. Quartely J. of Mathematics 5, 1934.

[3] HARDY, LITTLEWOOD and POLYA. Inequalities. Cambridge University Press.

[4] HÖNIG, Chaim S. A integral de lebesgue e suas aplicações Rio de Janeiro, IMPA, 1977.

[5] HORVÁTH, John. Topological vector spaces and distributions. Addison - Wesley Publishing Company, 1966.

[6] LITTLEWOOD, J. E. On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. Quartely J. of Mathematics 1, 1930.

[7] PRACIANO-PEREIRA, T. On bilinear maps in infinitely many variables. A Aparecer.

[8] PRACIANO-PEREIRA, T. On bounded multilinear forms on a class of ℓ^p spaces. A Aparecer.

[9] PRACIANO-PEREIRA, T. e RAITZ, C. Desigualdade de khinchines. A Aparecer.

[10] RUDIN, Walter. Real and complex analisis. New York, Mc - Graw-Hill, 1966.

[11] SIMMONS, G. F. Introduction to topology and modern analysis. New York, McGraw-Hill, 1963.

[12] TAYLOR, A. Introduction to functional analysis. New York, Wiley, 1958.